



**La sezione aurea
e la serie di
Fibonacci**

In natura, nell'arte e
nell'architettura

a cura di
Guido Caposio

Gli Speciali de Il Giornale dell' **Ingegnere**

Testo a cura di Guido Caposio*
Immagini: Tutti i diritti riservati a Guido Caposio

REDAZIONE

Publisher

Giorgio Albonetti

Coordinamento Editoriale

Vanessa Martina - v.martina@lswr.it

PUBBLICITÀ

Sales Manager

Luigi Mingacci

l.mingacci@lswr.it - Cell. 320 4093415

Ufficio Traffico

Elena Genitoni

e.genitoni@lswr.it - Tel. 02 89293962

SERVIZIO ABBONAMENTI

abbonamenti@quine.it - Tel. 02 864105

PRODUZIONE

Procurement Specialist

Antonio Iovene

a.iovene@lswr.it - Cell. 349 1811231

Realizzazione grafica

Fabio Castiglioni

EDITORE

QUINE Srl

Via Spadolini 7 - 20141 Milano

www.quine.it

info@quine.it - Tel. 02.864105

RESPONSABILE DATI PERSONALI

QUINE S.r.l. - Via Spadolini, 7 - 20141 Milano

Tel. 02.864105 - Fax 02.72016740

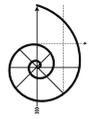
Per i diritti di cui all'articolo 7 del Decreto Legislativo n. 196/03, è possibile consultare, modificare o cancellare i dati personali ed esercitare tutti i diritti riconosciuti inviando una lettera raccomandata a: QUINE S.r.l. - Via Spadolini, 7 - 20141 Milano



© 2022 Quine S.r.l. - Tutti i diritti riservati

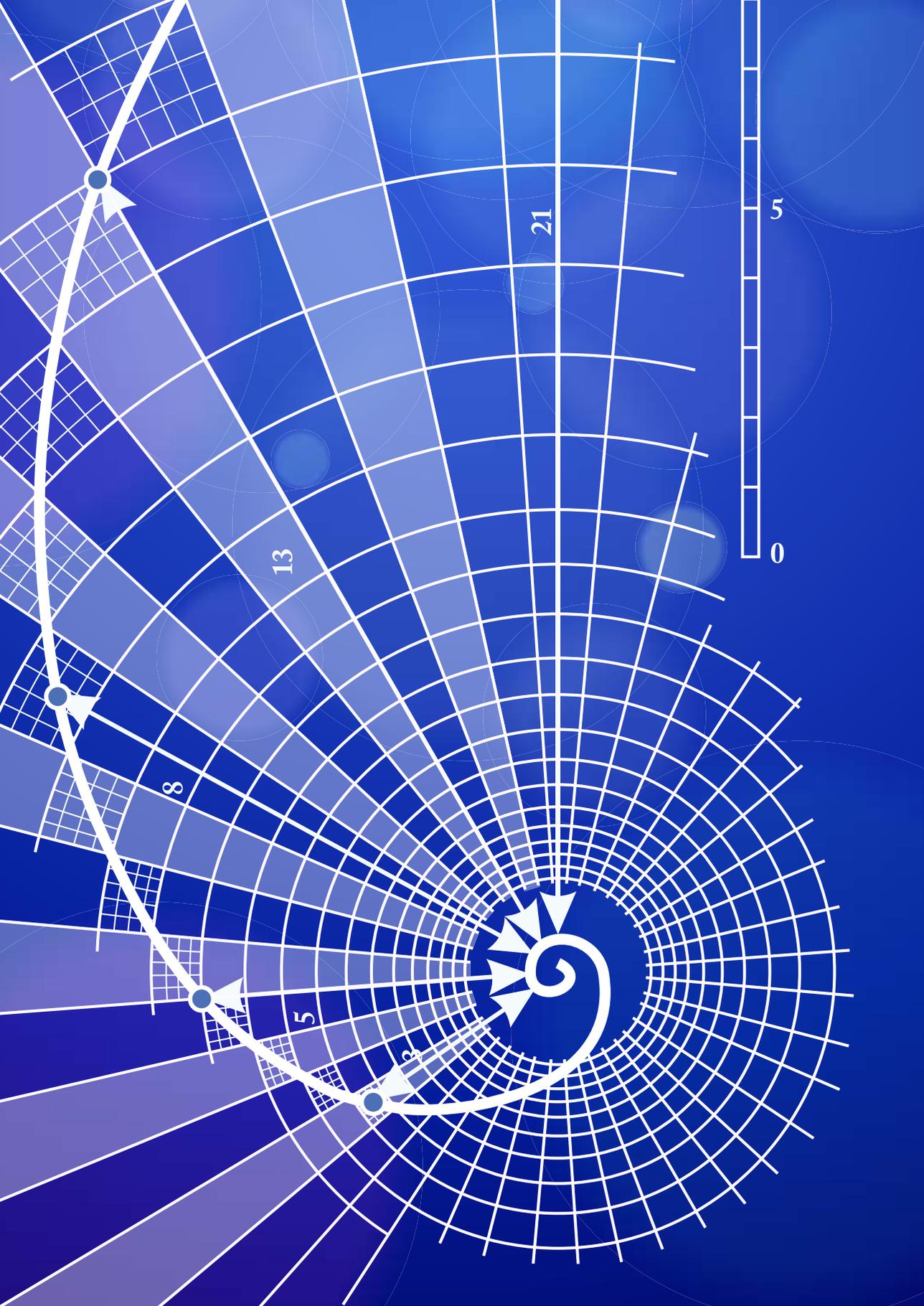
Note sull'autore

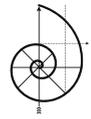
Guido Caposio, ingegnere, già docente al Politecnico di Torino, svolge l'attività professionale sia in campo nazionale che internazionale. è Coordinatore della Commissione Lavori Pubblici dell'Ordine degli Ingegneri della Provincia di Torino.



INDICE

Premessa	p. 5
Prima Parte ORIGINE DELLA SEZIONE AUREA	p. 7
Seconda Parte L'APPLICAZIONE DELLA SEZIONE AUREA	p. 9
Terza Parte ELEMENTI AUREI IN UN PENTAGONO	p. 11
Quarta Parte LA SERIE DI FIBONACCI	p. 13
Quinta parte LA SPIRALE LOGARITMICA, LA SPIRALE AUREA, LA SPIRALE DI FIBONACCI	p. 15
Sesta parte IL TRIANGOLO DI PASCAL E LA SERIE DI FIBONACCI	p. 19
Settima parte LA SERIE DI FIBONACCI IN NATURA, NELL'ARTE E IN ARCHITETTURA	p. 23
Bibliografia	p. 32





Premessa

Nel campo della geometria elementare, la sezione (ogni parte in cui è suddiviso un tutto unitario) di un segmento costituisce una delle parti in cui è suddiviso il segmento. Nel caso in cui un segmento sia costituito da due sezioni diseguali, in generale non esiste una proporzionalità tra le due parti. Laddove la lunghezza del segmento maggiore sia la media proporzionale tra la lunghezza totale e quella minore del segmento stesso, il rapporto tra lunghezza totale del segmento e lunghezza del segmento maggiore venne definita **Sezione Aurea** in veste di rappresentazione figurativa del numero aureo.

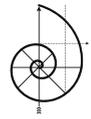
La definizione di sezione aurea, o rapporto aureo, scaturisce dal fatto che tale numero sembra essere il rapporto più estetico tra elementi geometrici. Dunque, la sezione aurea non si applica solamente a un segmento, ma è possibile costruire figure piane regolari, ad esempio un rettangolo, con tale proporzione nei lati. Anche in un pentagono regolare la sezione aurea è presente in vari elementi della sua geometria.

I contributi diretti di Fibonacci alla letteratura sul rapporto aureo compaiono nel libro *La Practica geometriae* pubblicato nel 1223. Il numero aureo è legato alla successione di Fibonacci, che ha destato, dal XIII secolo in poi, molta curiosità negli studiosi. Questa successione è composta da numeri che risultano essere la somma dei due precedenti. I numeri di Fibonacci godono di un numero notevole di proprietà speciali, la maggior parte delle quali tutt'altro che evidenti. Il matematico Charles Raine, nel 1948, ha scoperto una relazione tra i numeri della serie di Fibonacci e i triangoli rettangoli pitagorici collegati alle terne pitagoriche. Queste sono terne di numeri interi tali che, se interpretati come lunghezze, corrispondono ai lati di un triangolo rettangolo. È singolare vedere come spesso in natura si ritrovino geometrie riconducibili a quelle connesse alla successione dei numeri di Fibonacci.

Nelle forme dell'arte e dell'architettura vengono ancora oggi seguiti i rapporti aurei. Le forme sono dunque il mezzo utilizzato per trasmettere le emozioni dell'artista o del progettista a chiunque osservi una sua opera. In molte di queste però non si ha solo la bellezza in sé dell'oggetto rappresentato, ma emerge qualcosa in più che dona armonia ed esalta le qualità dell'opera stessa. Si tratta di una proporzione matematica impiegata da molti artisti per rendere uniche le proprie creazioni. Oltre all'arte, anche la natura sembra essere costruita con basi sulle proporzioni auree.

In conclusione, la sezione aurea pur rappresentando una delle molteplici costanti matematiche ha una particolarità, rispetto alle altre costanti poiché dona armonia e bellezza a qualsiasi oggetto che ne segua le proporzioni.





Prima parte

Origine della sezione aurea

Nel 336 a.C. il ventenne Alessandro, passato alla storia come *Il Grande*, ascese al trono della Macedonia. Con una serie di brillanti vittorie militari conquistò quasi tutta l'Asia Minore, la Siria, l'Egitto e Babilonia. Dopo la sua morte a soli trentatré anni, Tolomeo I assunse il controllo dell'Egitto e delle province africane. Una delle prime iniziative di Tolomeo I, fu la fondazione ad Alessandria di un importante centro di insegnamento. Della scuola, Euclide, fu uno dei primi docenti e autore del più celebre trattato di storia della matematica, gli *Elementi*¹, in tredici volumi, sulla geometria e sulla teoria dei numeri. Negli Elementi, Euclide cerca di compendiare gran parte delle conoscenze matematiche del suo tempo e il rapporto aureo è più volte nominato e discusso.

Nel campo della geometria elementare la sezione (ogni parte in cui è suddiviso un tutto unitario) di un segmento costituisce una delle parti in cui è suddiviso il segmento. Nel caso in cui un segmento sia costituito da due sezioni diseguali, in generale non esiste una proporzionalità tra le due parti. Laddove la lunghezza del segmento maggiore sia la media proporzionale tra la lunghezza totale e quella minore del segmento stesso, il rapporto tra lunghezza totale del segmento e lunghezza del segmento maggiore venne definita **sezione aurea** in veste di rappresentazione figurativa del numero aureo.

Riportando l'espressione di Euclide citata nel II libro degli Elementi, la sezione aurea nasce dalla suddivisione di un segmento in proporzione estrema e media. Supponendo di esaminare un segmento di lunghezza unitaria, se x rappresenta il segmento di lunghezza maggiore, $1-x$ rappresenta il segmento di lunghezza minore.

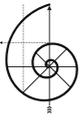
Dunque la sezione aurea nasce quando sia valida la seguente proporzione

$$1:x = x:(1-x)$$

ossia il rapporto tra il segmento maggiore e il segmento minore è uguale al rapporto tra il segmento maggiore e il segmento minore. Ne deriva $x^2 = 1(1-x)$, da cui l'equazione di secondo grado $x^2 + x - 1 = 0$, che risolta, per il valore positivo, determina per il segmento di lunghezza maggiore, il valore

$$x = (\sqrt{5}-1)/2 = 0,6180339887...$$

¹ Il tredicesimo libro Elementi di Euclide è dedicato alla costruzione dei poliedri regolari



La sezione aurea e la serie di Fibonacci

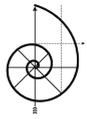
contraddistinto dalla lettera Φ , iniziale del nome greco dello scultore Fidia.
In particolare Φ è l'unico numero non naturale, il cui reciproco e il cui quadrato mantengono inalterata la propria parte decimale:

$$\Phi = 1,6180339887\dots$$

$$\Phi^2 = 2,6180339887\dots$$

$$1/\Phi = 0,6180339887\dots$$

La definizione di sezione aurea, o rapporto aureo, scaturisce dal fatto che tale numero sembra essere il rapporto più estetico tra elementi geometrici. Dunque, la sezione aurea non si applica solamente a un segmento, ma è possibile costruire figure piane regolari, per esempio un rettangolo, con tale proporzione nei lati.



Seconda parte

L'applicazione della sezione aurea

Il rettangolo aureo può essere costruito a partire da un quadrato ABCD di lato AB unitario (**Figura 1**). Dal punto mediano M della base del quadrato, è possibile tracciare il segmento MC che unisce tale punto con il vertice C del quadrato .

La lunghezza del segmento MC, ipotenusa del triangolo rettangolo MCB è data da:

$$MC = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2} = \sqrt{0,25 + 1} = 1,1180339887$$

Con centro dal punto mediano M della base del quadrato, è possibile tracciare, con raggio MC, un arco di circonferenza sino a intersecare nel punto E il prolungamento della base del quadrato.

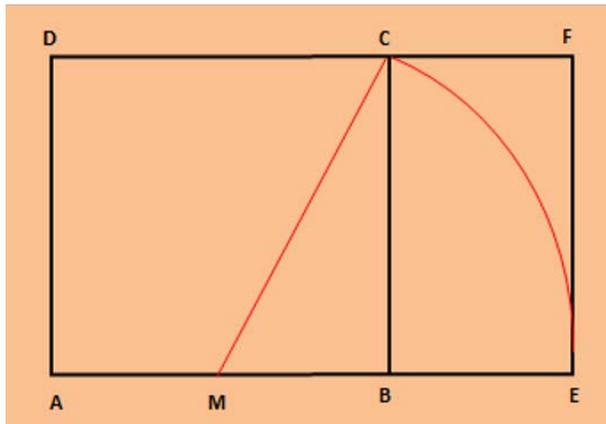
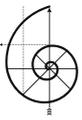


Figura 1

Tracciando da tale punto un segmento parallelo al lato del quadrato, il prolungamento del lato superiore del quadrato viene intersecato nel punto F. Il rettangolo AEFD di altezza unitaria così ottenuto, avrà il lato base AE costituito da un segmento di lunghezza pari al valore numerico della sezione aurea Φ , somma dei segmenti AM ed MC = ME, ossia

$$AE = AM + ME = 0,5 + 1,1180339887 = 1,6180339887$$

Dunque, nel rettangolo AEFD il valore del rapporto tra lato maggiore e lato minore AE/EF è pari a Φ .



La sezione aurea e la serie di Fibonacci

Il valore numerico della sezione aurea Φ , somma dei segmenti AM ed MC = ME, fu descritta da Keplero, congiuntamente al teorema di Pitagora, come uno dei “*due grandi tesori della geometria*”.

Peraltro, anche nel rettangolo BEFC (**Figura 2**), che deriva dalla sottrazione tra superficie del rettangolo AEFD e quella del quadrato ABCD, il valore del rapporto tra lato maggiore BC e lato minore BE è pari a Φ :

$$\Phi = BC/BE = 1/0,6180339887 = 1,6180339887$$

Come conseguenza ogni rettangolo ottenuto da un rettangolo aureo, con sottrazione del quadrato costruito sul lato maggiore, è ancora un rettangolo aureo.

Sono quindi aurei (**Figura 3**) i rettangoli:

- HGEB ottenuto dalla sottrazione tra rettangolo BEFC e il quadrato HGFC;
- HIPB ottenuto dalla sottrazione tra rettangolo HGEB e il quadrato IGEP;
- HILM ottenuto dalla sottrazione tra rettangolo HIPB e il quadrato MLPB;
- NILO ottenuto dalla sottrazione tra rettangolo HILM e il quadrato HNOM;
- ...

Con il procedimento su indicato si generano rettangoli aurei sempre più piccoli, di dimensioni ridotte, ogni volta di un fattore Φ . Tracciando due diagonali che si intersecano in ciascuna coppia di rettangoli derivati (**Figura 3**) si riscontra che tutte le diagonali (ED ed FB, HE e IB, HL e OI, ...) si intersecano in un punto. Dunque, la serie geometrica di rettangoli aurei sempre più piccoli converge intorno a un punto senza mai raggiungerlo.

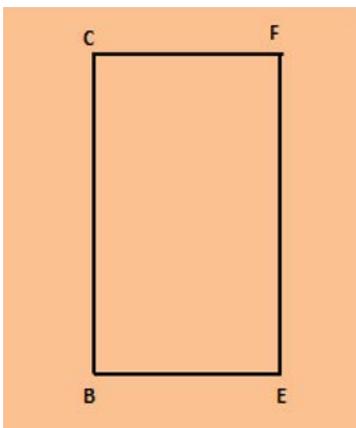


Figura 2

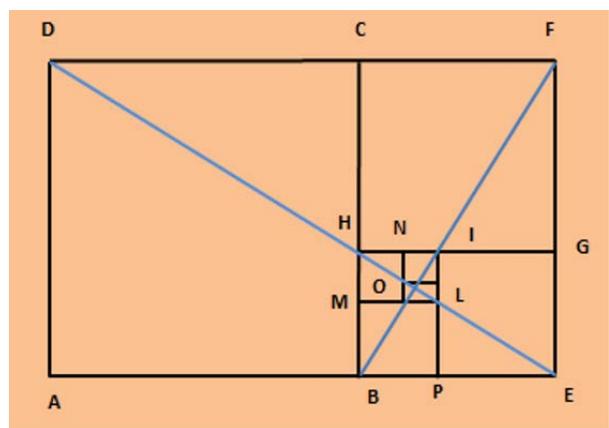
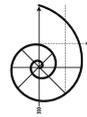


Figura 3



Terza parte

Elementi aurei in un pentagono

In un pentagono regolare la sezione aurea è presente in vari elementi della sua geometria (**Figura 4**). Partendo da un pentagono di lato di lunghezza **L**, tracciando tutte le sue diagonali di lunghezza **D** si ottiene una stella a 5 punte inscritta nel pentagono. Il procedimento potrebbe essere reiterato all'infinito, generando pentagoni e stelle sempre più piccoli, con la punta alternativamente verso l'alto e verso il basso. Il pentagramma – o pentagono stellato (cioè il pentagono con la stella a cinque punte formata dalle sue diagonali, dal greco *pente*, “cinque” e *gramma*, “linea”) – fu il simbolo della scuola pitagorica.

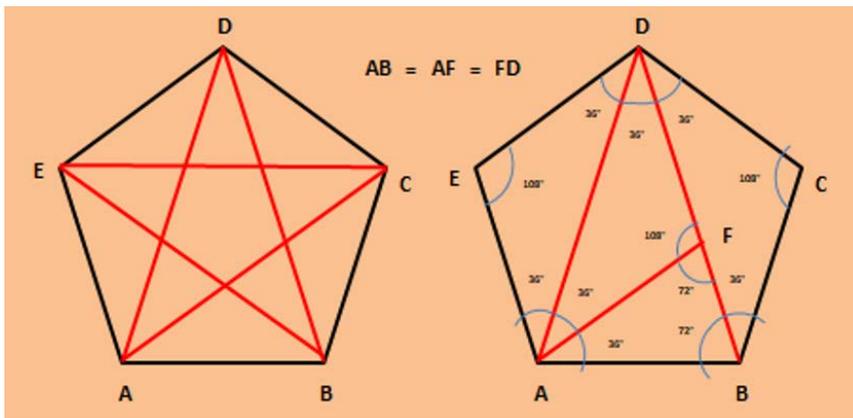


Figura 4

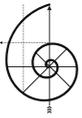
Nel pentagono ABCDE (**Figura 4**) si esamini il triangolo ABD costituito da due diagonali e un lato del pentagono; il rapporto tra la diagonale AD e il lato AB del pentagono è uguale al rapporto tra il lato AB e la base FB del triangolo FBA, essendo i due triangoli ABD ed FBA simili. Pertanto è possibile scrivere la proporzione:

$$AD:AB = AB:FB \quad (1)$$

Essendo $FB = DB - FD$, $AD = DB$, $AF = FD = AB$, ricordando che nella proporzione (1) il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi, si ottiene:

$$AB^2 = AD \cdot FB; \quad AB^2 = AD \cdot (DB - FD); \quad AB^2 = AD^2 - AD \cdot FD; \quad AD^2 - AB^2 - AD \cdot AB = 0$$

Poichè AD è la diagonale del pentagono di lunghezza D e AB è il lato di lunghezza L, è possibile quindi scrivere:



$$D^2 - L^2 - DL = 0, \text{ ossia } (D/L)^2 - D/L - 1 = 0$$

Dall'equazione di secondo grado, la soluzione positiva è pari a:

$$D/L = (\sqrt{5}+1)/2 = \Phi = 1,6180339887$$

Dunque, il rapporto tra la diagonale di un pentagono regolare e il suo lato è il rapporto aureo.

In **Figura 4**, $DB/AB = \Phi$. Ma $AB=AF=DF$ da cui deriva che **anche il rapporto tra la diagonale di un pentagono regolare e il suo segmento maggiore è il rapporto aureo** $DB/DF = \Phi$.

Ne discende che, i punti di intersezione delle diagonali del pentagono regolare dividono le diagonali stesse in due segmenti fra cui sussiste un rapporto aureo.

In un pentagono regolare (**Figura 5**), i triangoli isosceli formati dalle diagonali coincidenti (es. AD e BD) e la base del pentagono (es. AB) sono triangoli aurei (es. ABD) in cui la bisettrice dell'angolo di base di 72° divide il lato opposto (es. DB) in parti auree (es. DH e HB ove $DH/HB = \Phi$).

Nel pentagono regolare si possono individuare 20 triangoli aurei di dimensioni diverse (**Figura 3**). Nel dettaglio:

- 5 triangoli formati dalle diagonali e dal lato del pentagono maggiore: ABD-ECA-DBE-DAC-CEB;
- 5 triangoli formati dalle 5 punte della stella maggiore e dai lati del pentagono minore: LID-ICH-HBG-GAF-FEL.
- 5 triangoli formati da una parte delle diagonali del pentagono maggiore e dai lati del pentagono minore: FHD-LGC-LHA-IGE-IFB;
- 5 triangoli formati da una parte delle diagonali del pentagono maggiore, dai lati dalle punte delle stelle maggiori e dai lati del pentagono maggiore: EDF-EAL-DCH-CBI-BAH.

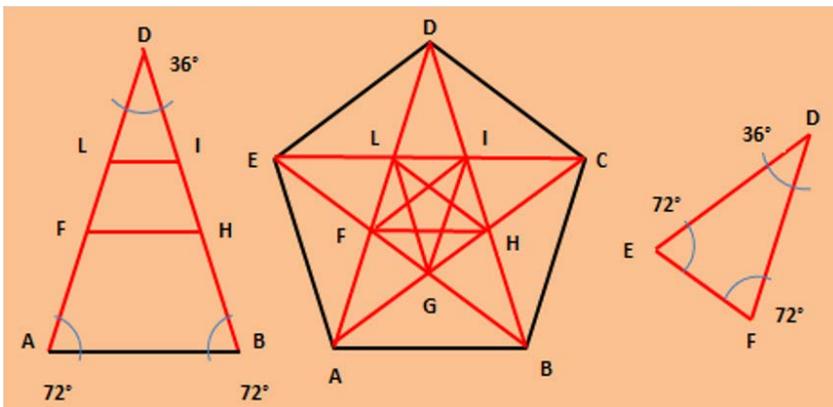
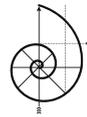


Figura 5



Quarta parte

La serie di Fibonacci

Leonardo Pisano, detto Fibonacci, nacque a Pisa nel XII secolo. È considerato uno dei più grandi matematici dell'epoca. I contributi diretti di Fibonacci alla letteratura sul rapporto aureo compaiono nel libro *Practica geometriae* pubblicato nel 1223.

Nel testo sono anche esposti nuovi metodi per il calcolo della diagonale e dell'area del pentagono; peraltro tali operazioni sono strettamente legate al rapporto aureo.

Il *numero aureo* è legato alla successione di Fibonacci, che ha destato, dal XIII secolo in poi, molta curiosità negli studiosi.

Questa successione è composta da numeri che risultano essere la somma dei due precedenti (**0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1.597, 2.584, 4.181, 6.765, 10.946, 17.711,...**). Nella successione il rapporto tra un termine e quello successivo (es. 610/987) si avvicina molto rapidamente a 0,618..., mentre dal rapporto tra un termine e il precedente (es. 610/377) si ottiene – con approssimazione sempre più precisa, operando rapporti tra numeri sempre più elevati della serie, ad es. 17.711/10.946 = 1,618033985 – proprio il **numero aureo**.

Pertanto, la proprietà della successione si può sintetizzare nella formula:

$$\left(\frac{F_n}{F_{n-1}}\right) = \phi = 1,61803398874989484820 \dots \quad \text{numero irrazionale}$$

I numeri di Fibonacci godono di un numero notevole di proprietà speciali, la maggior parte delle quali tutt'altro che evidenti.

Fra le più elementari ed espressive, si citano :

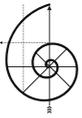
1. La somma del quadrato di due numeri di Fibonacci consecutivi è un numero di Fibonacci:

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} \quad \text{ad esempio} \quad F_4^2 + F_5^2 = F_9 \quad 3^2 + 5^2 = 34$$

2. Ogni terzo numero di Fibonacci è divisibile per 2= F_3 , ogni quarto numero di Fibonacci è divisibile per 3= F_4 , e in generale ogni k-esimo numero di Fibonacci è divisibile per F_k , ad esempio 2,8,34,144 sono divisibili per 2; 3,21,144,987 sono divisibili per 3 , etc.

3. Le cifre finali dei numeri di Fibonacci si ripetono a cicli di 60, le ultime due cifre si ripetono a cicli di 300, le ultime tre cifre a cicli di 1.500, le ultime quattro cifre a cicli di 15.000, le ultime cinque cifre a cicli di 150.000, e così via.

Per esempio dalla **Figura 6** si evince che le cifre finali dei primi tredici numeri di Fibonacci $F_1 \div F_{13}$ si ripetono in quelle della sequenza dal sessantunesimo al settantatreesimo numero di Fibonacci $F_{61} \div F_{73}$, ovvero si ripetono le seguenti cifre finali 1,1, 2,3,5,8,3,1,4,5,9,4,3.



La sezione aurea e la serie di Fibonacci

4. Il quadrato di un numero di Fibonacci differisce dal prodotto dei numeri di Fibonacci precedente e successivo per un'unità: ad esempio $F_6=8$, $(13 \times 5) - 8^2 = (-1)^6$, $65 - 64 = 1$.

F1	1	F61	2.504.730.781.961
F2	1	F62	4.052.739.537.881
F3	2	F63	6.557.470.319.842
F4	3	F64	10.610.209.857.723
F5	5	F65	17.167.680.177.565
F6	8	F66	27.777.890.035.288
F7	13	F67	44.945.570.212.853
F8	21	F68	72.723.460.248.141
F9	34	F69	117.669.030.460.994
F10	55	F70	190.392.490.709.135
F11	89	F71	308.061.521.170.129
F12	144	F72	498.454.011.879.264
F13	233	F73	806.515.533.049.393

Figura 6

Quinta parte

La spirale Logaritmica, la spirale aurea, la spirale di Fibonacci

La **spirale logaritmica (Figura 7)** è la traiettoria di un punto che si muove di moto uniformemente accelerato su una semiretta che ruota uniformemente intorno alla sua origine. Il segmento di distanza tra spire successive (il passo della spira) non è costante come nella spirale archimedeana, ma aumenta secondo una progressione geometrica.

Ogni raggio vettore sarà più ampio del precedente secondo un rapporto costante (le spirali logaritmiche sono anche dette proporzionali), perciò la curva crescendo non cambia forma.

Tale spirale non raggiunge mai il polo, poiché il centro della spirale è un punto asintotico. Proseguendo l'ingrandimento verso il centro si trovano infinite spirali identiche in scala ridotta. Allo stesso tempo, allontanandosi sempre di più dall'origine, aumentano le dimensioni della spirale, essa rimane sempre somigliante a se stessa. L'angolo che la spirale forma con i cerchi centrati nell'origine (angolo di inclinazione) è costante (**Figura 7**). L'aggettivo meravigliosa, coniato da Bernoulli, si riferisce proprio al fatto di non avere né un inizio né una fine; la proprietà per cui la curva esegue infinite evoluzioni verso il suo centro è detta autosomiglianza.

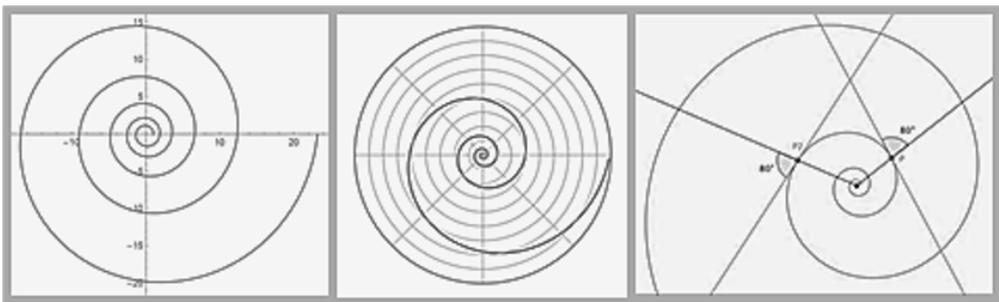
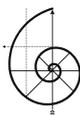


Figura 7

La spirale logaritmica è una spirale la cui equazione, in coordinate polari (r, θ) , è data da

$$r = ae^{k\theta}$$

dove r è il raggio di ogni giro della spirale; a è la costante che dipende dalla partico-



La sezione aurea e la serie di Fibonacci

lare spirale, θ è l'angolo di rotazione, e è la base del logaritmo naturale, numero di Nepero 2,71828..., k il coefficiente di espansione:

- se $k > 0$ la spirale si avvolge intorno al punto centrale in senso antiorario;
- se $k = 0$ la spirale degenera in una circonferenza;
- se $k < 0$ la spirale si avvolge intorno al punto centrale in senso orario.

Poiché θ può essere ricavato dalla relazione, tramite l'applicazione dei logaritmi, è nato il termine *spirale logaritmica*. La spirale logaritmica è anche conosciuta come spirale di crescita, *spirale equiangolare* e *spira mirabilis*.

La **spirale aurea** è un tipo di spirale logaritmica la cui equazione polare è data da

$$r(t) = a\phi^{2\theta/\pi}$$

dove $r(t)$ è la distanza dall'origine, ossia il raggio vettore, $\phi=1,6180339887$ è il valore numerico della sezione aurea, a è un coefficiente che permette di ingrandire o ridurre il grafico della spirale, θ è l'angolo di rotazione.

La **spirale di Fibonacci (Figura 8)** si costruisce partendo dai quadrati i cui lati sono i numeri di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...; dall'unione di un'infinità di quarti di circonferenza in detti quadrati si può costruire una spirale, detta – appunto – spirale di Fibonacci, in grado di approssimare la spirale aurea.

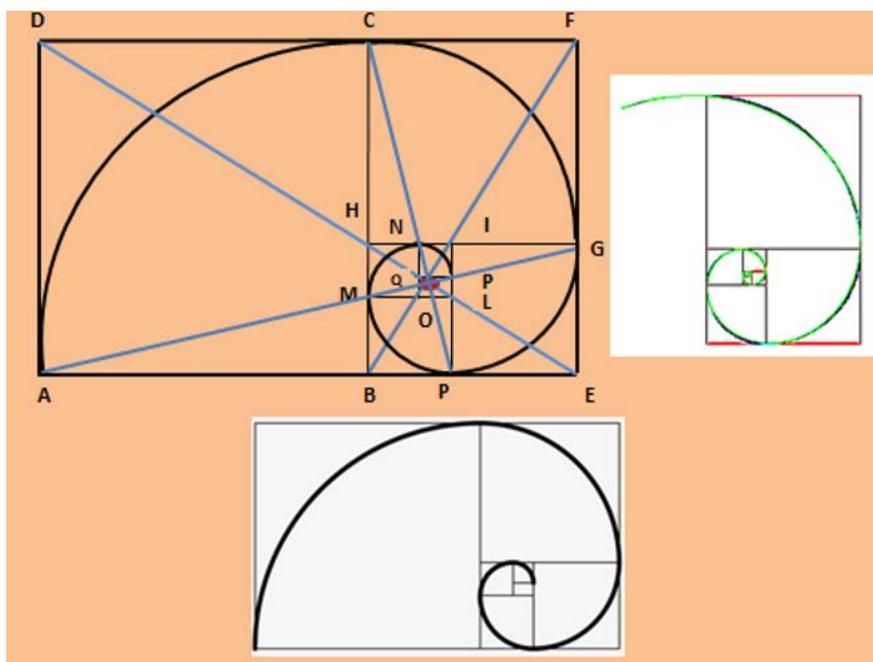
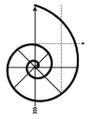


Figura 8



Spesso in modo improprio si identifica la spirale di Fibonacci con la spirale aurea. La spirale di Fibonacci, come detto, è data dall'unione di un'infinità di quarti di circonferenza, mentre la spirale aurea è un particolare tipo di spirale logaritmica, che si sovrappone quasi totalmente a quella di Fibonacci. Tra le due curve il grado di approssimazione è talmente elevato da non potersi notare visivamente la differenza tra le due. In **Figura 8** (spirale destra), in colore verde è rappresentata la spirale logaritmica aurea, in blu la spirale di Fibonacci.

Entrambe le spirali si avvitano asintoticamente verso l'incrocio tra le diagonali, rappresentate in colore blu nella **Figura 8**, che possono essere ricavate all'interno dei rettangoli aurei (**Figura 8** in basso). Tale punto di incontro è stato chiamato da Clifford Pickover l'*Occhio di Dio* (in rosso nella **Figura 8** in alto).

La spirale aurea (o armonica) ha una caratteristica molto particolare, da cui deriva il suo nome, ovvero il rapporto fra raggi consecutivi (**Figura 9**) è costante e pari a Φ .

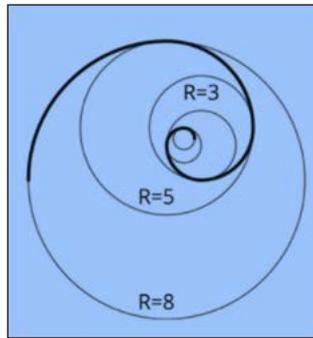
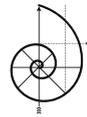


Figura 9





Sesta parte

Il triangolo di Pascal e la serie di Fibonacci

Blaise Pascal è morto all'età di 39 anni. Tuttavia, durante la sua breve vita ha dimostrato di essere un eccezionale fisico, matematico, filosofo e scrittore.

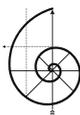
Questo grande scienziato francese ha dato un enorme contributo alla matematica. Uno dei suoi capolavori scientifici è il *Trattato sul triangolo aritmetico*, che definisce coefficienti binomiali disposti in un certo ordine. Le proprietà di questo schema sono sorprendenti nella loro diversità. La procedura per costruire il triangolo di Pascal (noto anche come Triangolo di Tartaglia) è la seguente:

- si inizia con il numero uno all'apice e la seconda riga sottostante con una coppia di numeri uno;
- per costruire la terza e tutte le righe successive, si posiziona il numero uno all'inizio e alla fine della riga;
- si ricava ogni cifra della riga, collocata tra la coppia di numeri superiori, sommando le due cifre immediatamente sopra di essa;
- la terza riga è quindi 1, 2, 1, la quarta riga è 1, 3, 3, 1, la quinta riga è 1, 4, 6, 4, 1 e così via;
- se ogni cifra occupa una casella delle stesse dimensioni di tutte le altre caselle, la disposizione forma un triangolo equilatero perfetto delimitato su due lati da caselle col numero uno e con un numero di caselle uguale in lunghezza al numero della riga;
- le file sono simmetriche in quanto riportano gli stessi numeri a partire dai due estremi proseguendo sino all'asse del triangolo verticale.

Le proprietà del triangolo di Pascal sono:

- la somma dei numeri in ogni riga è il doppio della somma dei numeri nella riga precedente;
- ogni riga calcola complessivamente l'esponente di 11, ossia: 11^0 (nella casella iniziale con 1), 11^1 (nella prima riga due caselle con 1 e 1), 11^2 (nella seconda riga tre caselle con 1, 2 e 1), 11^3 (nella terza riga quattro caselle 1, 3, 3 e 1)... ;
- i numeri del triangolo di Pascal vengono utilizzati nel calcolo delle potenze di un binomio (Binomio di Newton). Ad esempio nella quarta potenza del binomio $(a + b)^4$:
 - i coefficienti dei termini a, b sono i numeri della *quarta riga del triangolo di Pascal* ossia 1, 4, 6, 4 e 1;
 - la parte letterale dei termini del polinomio si ottiene scrivendo il prodotto delle potenze crescenti di **a** (da a^4 ... ad a^0) e decrescenti di **b** (da b^0 ... a b^4), ossia:

$$(a + b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$



La sezione aurea e la serie di Fibonacci

- Riempendo le caselle dei numeri del triangolo di Pascal con colori diversi, per esempio in rosso le caselle contenenti i numeri dispari e in verde le caselle con i pari, si produce un motivo visivo noto come il **triangolo di Sierpinski (Figura 10)**. È considerato uno dei frattali più famosi al mondo, ovvero una figura non intera in cui è possibile notare, se ingrandita, l'elemento di partenza in scala. Prende il nome proprio dal matematico che per primo ne scoprì le proprietà.

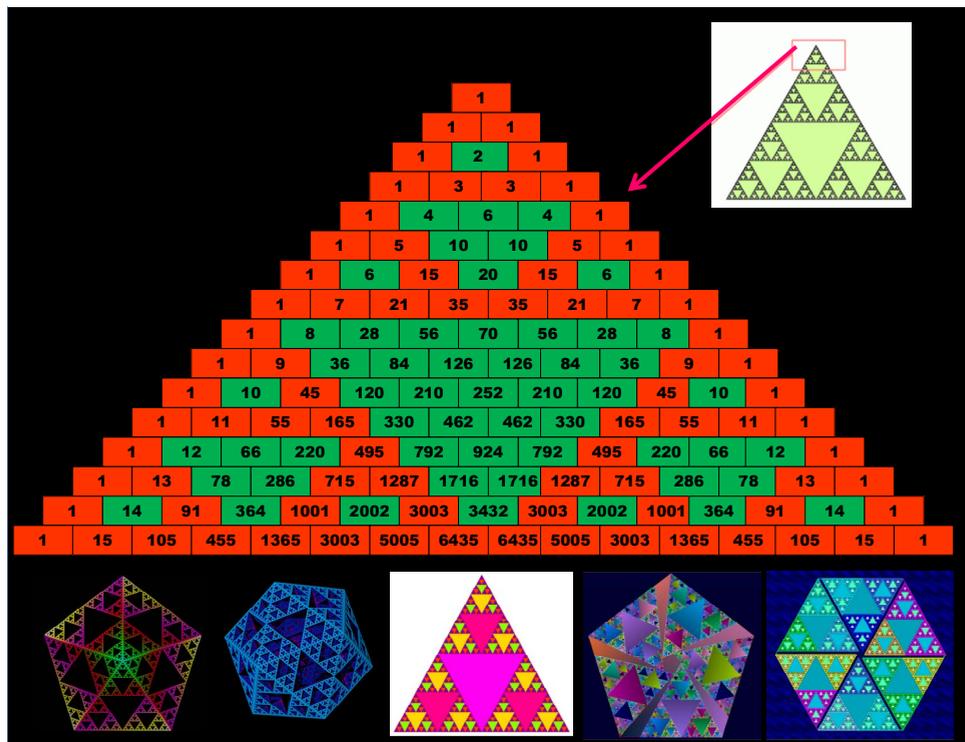
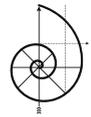


Figura 10

- Permette di derivare la serie di Fibonacci.
La serie di Fibonacci si ricava dal triangolo di Pascal (**Figura 11**) tracciando sul triangolo le diagonali. A titolo esemplificativo sono state tracciate, in **Figura 11**, undici diagonali a colori alterni (blu e rosso). Sommando i numeri contenuti nelle caselle del triangolo di Pascal, segnati da ciascuna diagonale, partendo dal vertice del triangolo, si ottiene la sequenza della serie di Fibonacci così definita:

Prima diagonale blu	Primo numero della serie	1	=1
Seconda diagonale rossa	Secondo numero della serie	1	=1
Terza diagonale blu	Terzo numero della serie	1+1	=2
Quarta diagonale rossa	Quarto numero della serie	2+1	=3

La sezione aurea e la serie di Fibonacci



Quinta diagonale blu	Quinto numero della serie	$1+3+1$	=5
Sesta diagonale rossa	Sesto numero della serie	$3+4+1$	=8
Settima diagonale blu	Settimo numero della serie	$1+6+5+1$	=13
Ottava diagonale rossa	Ottavo numero della serie	$4+10+6+1$	=21
Nona diagonale blu	Nono numero della serie	$1+10+15+7+1$	=34
Decima diagonale rossa	Decimo numero della serie	$5+20+21+8+1$	=55
Undicesima diagonale blu	Undicesimo numero della serie	$1+15+35+28+9+1$	=89

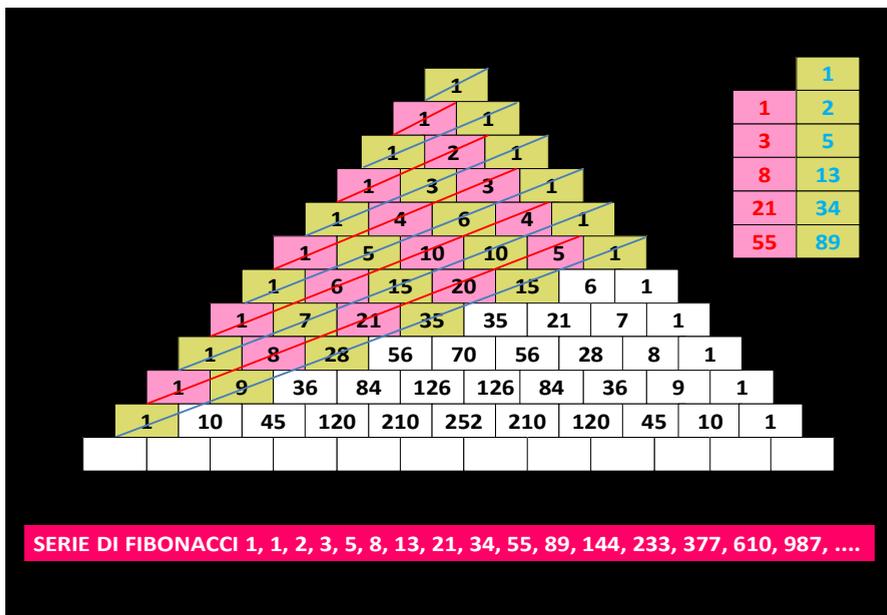


Figura 11

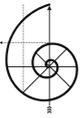
Il matematico Charles Raine, nel 1948, ha scoperto una relazione tra i numeri della serie di Fibonacci e i triangoli rettangoli pitagorici collegati alle terne pitagoriche. Queste sono terne di numeri interi tali che, se interpretati come lunghezze, corrispondono ai lati di un triangolo rettangolo.

Per esemplificare si scelgano quattro numeri della serie di Fibonacci qualsiasi (F_7, F_8, F_9, F_{10}), purché consecutivi.

La terna pitagorica sarà generata seguendo la seguente procedura di calcolo:

- il prodotto degli estremi dei quattro numeri di Fibonacci $\rightarrow F_7 \cdot F_{10} = a$
- il doppio del prodotto dei medi dei quattro numeri di Fibonacci $\rightarrow 2 \cdot F_8 \cdot F_9 = b$
- la somma dei quadrati dei medi dei quattro numeri di Fibonacci $\rightarrow F_8^2 + F_9^2 = c$

La terna pitagorica sarà data da **a, b, c** da cui $a^2 + b^2 = c^2$



La sezione aurea e la serie di Fibonacci

Si prendano ad esempio i quattro numeri consecutivi della serie di Fibonacci **13, 21, 34, 55**:

$$F_7 \cdot F_{10} = 13 \times 55 = 715$$

$$2 \cdot F_8 \cdot F_9 = 2 \times 21 \times 34 = 1.428$$

$$F_8^2 + F_9^2 = 212 + 342 = 1.597$$

La terna pitagorica ossia, le lunghezze dei lati (2 cateti e l'ipotenusa) del triangolo rettangolo, sarà data da **715, 1.428, 1.597**, da cui $715^2 + 1.428^2 = 1.597^2$

Per verifica

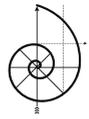
$$715^2 = 511.225$$

$$1.428^2 = 2.039.184$$

$$1.597^2 = 2.550.409$$

$$511.225 + 2.039.184 = 2.550.409$$

È interessante notare che il terzo numero della terna pitagorica **1.597** (l'ipotenusa del triangolo rettangolo) è esso stesso un numero della serie di Fibonacci.



Settima parte

La serie di Fibonacci in natura, nell'arte e in architettura

È singolare vedere come spesso in natura si ritrovino geometrie riconducibili a quelle connesse alla successione dei numeri di Fibonacci.

Nelle forme dell'arte e dell'architettura vengono ancora oggi seguiti i rapporti aurei. Le forme sono dunque il mezzo utilizzato per trasmettere le emozioni dell'artista o del progettista a chiunque osservi una sua opera. In molte di queste però non si ha solo la bellezza in sé dell'oggetto rappresentato, ma emerge qualcosa in più che dona armonia ed esalta le qualità dell'opera stessa. Si tratta di una proporzione matematica impiegata da molti artisti per rendere uniche le proprie creazioni. Oltre all'arte, anche la natura sembra essere costruita con basi sulle proporzioni auree.

A titolo esemplificativo, nel seguito verranno analizzati alcuni casi di interesse.

BIOLOGIA VEGETALE

La *Fillotassi* o *Fillotassia* (dal greco *phýllon* – foglia – e *táxis* – disposizione –) in botanica è il modo caratteristico e costante per ogni specie vegetale, secondo cui le foglie si inseriscono sui rami, o secondo cui si dispongono i semi in alcuni fiori.

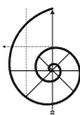
Le foglie sono disposte sui rami in modo tale da non coprirsi l'una con l'altra per permettere a ciascuna di esse di ricevere la luce del sole. Il rapporto tra il numero di foglie e il numero di giri viene denominato **rapporto fillotattico**.

Darcy Thompson (biologo e matematico scozzese, uno dei pionieri della biomatematica) osservò che il regno vegetale ha una curiosa preferenza per particolari numeri e per specifiche geometrie di spirali e che tali numeri e geometrie sono strettamente connessi alla successione di Fibonacci.

Per esempio, se si considera come punto di partenza la prima foglia di un ramo e si calcolano quante foglie ci siano fino a quella perfettamente allineata, spesso tale numero è un numero della serie di Fibonacci (**Figura 12**).

La disposizione delle foglie secondo la Fillotassi di Fibonacci, come conseguenza della stretta relazione tra Fillotassi e i numeri di Fibonacci, fu studiata a metà del Settecento da due matematici, C. Bonnet e G.L. Calandrini.

Un'importante scoperta sulla regolarità nell'accrescimento di una pianta si ebbe intorno al 1837 grazie ad Auguste e Louis Bravais. Essi osservarono che ciascun elemento botanico, sviluppandosi uno per uno, diverge di un angolo rispetto al precedente. Nella maggior parte dei casi l'angolo di divergenza si approssima all'angolo aureo cioè $137,5^\circ$.



La sezione aurea e la serie di Fibonacci

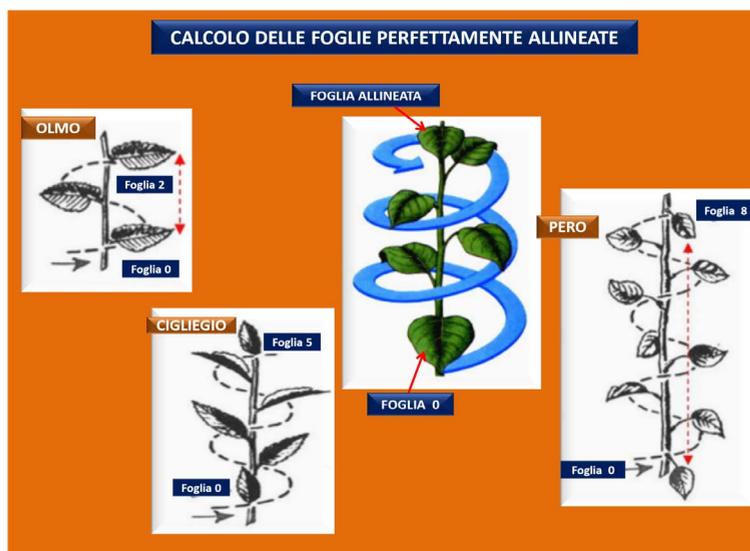


Figura 12

Per comprendere il significato dell'angolo aureo, si considerino due numeri consecutivi della successione di Fibonacci, ad esempio $F_9=34$ e $F_{10}=55$. Il loro rapporto, moltiplicato per 360° , è pari a $34/55 \times 360^\circ \approx 222,5^\circ$. Ora, poiché l'angolo pari a $222,5^\circ$ è maggiore di 180° , si deve sottrarlo a 360° .

Si ottiene così il valore di $137,5^\circ$, cioè l'angolo aureo.

In altre parole $137,5^\circ = 360^\circ - 360^\circ / \phi$.

Tale angolo di divergenza è costante per qualsiasi rapporto di due numeri consecutivi della successione di Fibonacci. Anche il numero dei petali dei fiori è variabile nella sequenza di Fibonacci. Ad esempio (Figura 13):

- la *Zantedeschia* ha un petalo;
- l'*Euphorbia milii* due;
- le *Ninfee Hydrocleys Nymphoides* tre;
- i *Ranuncoli* cinque;
- il *Delphinium* cinque;
- il *Cosmos Bipinnatus* otto.

I pistilli (portatrici di semi) sulle corolle dei fiori spesso si dispongono secondo uno schema preciso formato da spirali auree.

Frequentemente il numero delle spirali orientate in senso orario è pari a 34, mentre quelle orientate in senso antiorario è pari 55 (due numeri di Fibonacci).



Figura 14

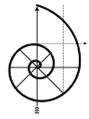


Figura 13

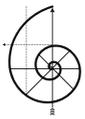
Altre volte i numeri di Fibonacci sono rispettivamente 13 e 21, 55 e 89, 89 e 144. In **Figura 14** si può notare che i pistilli dell'*Arthemis tinctoria* sono disposti a spirale e i numeri di spirali nelle due direzioni è pari a 13 (senso orario) e 21 (senso antiorario), ossia numeri di Fibonacci consecutivi. La *Fillotassi di Fibonacci* si può facilmente

riscontrare anche nel numero di spirali formate dai pistilli di girasole, di margherita, nelle infiorescenze composte di cavolfiori e broccoli, o nelle spirali formate dalle brattee di una pigna.

Per esempio, in **Figura 15** i piccoli fiori al centro del girasole (che è in effetti una infiorescenza) sono disposti lungo due insiemi di spirali che ruotano rispettivamente in senso orario e antiorario.



Figura 15



La sezione aurea e la serie di Fibonacci

BIOLOGIA UMANA

Il DNA umano, la molecola che racchiude l'informazione genetica, è composta da due filamenti a forma di elica che si intrecciano. I filamenti di DNA presentano due estremità, chiamate 5' (*cinque primo*) e 3' (*tre primo*).

Per convenzione, biologi e genetisti hanno stabilito che l'estremità 5' rappresenta il capo di un filamento di DNA, mentre l'estremità 3' rappresenta la coda. I due filamenti sono antiparalleli, uno in direzione 5'-3' e l'altro in direzione 3'-5'.

I filamenti sono uniti l'un l'altro dalle cosiddette basi azotate. Le basi azotate si succedono le une alle altre a costituire il codice a cui corrispondono specifiche informazioni che regolano tutto ciò che accade dentro la cellula.

La maggior parte del DNA si trova rinchiuso dentro a una specifica parte della cellula (nucleo). Nelle cellule umane, il DNA si trova diviso in 46 strutture (cromosomi).

Una cellula con 46 cromosomi può contare su 6 miliardi di basi azotate.

Questo significa che ogni cellula contiene al suo interno circa due metri di DNA racchiusi in uno spazio microscopico.

La molecola del DNA, come detto, ha la forma di una doppia elica costituita da filamenti polinucleotidici. Il distanziamento delle due eliche è determinato da una coppia di basi planari distese orizzontalmente, di pari lunghezza. Le coppie di basi adiacenti sono separate di $3,4\text{\AA}$ e si succedono a ogni avanzamento dell'elica di 36° . In tal modo rimane costante il diametro della doppia elica.

Le basi azotate, che costituiscono gli acidi nucleici sono: l'adenina (A), la guanina (G), la citosina (C), la timina (T) e l'uracile (U). L'uracile di norma non è presente nelle catene di DNA.

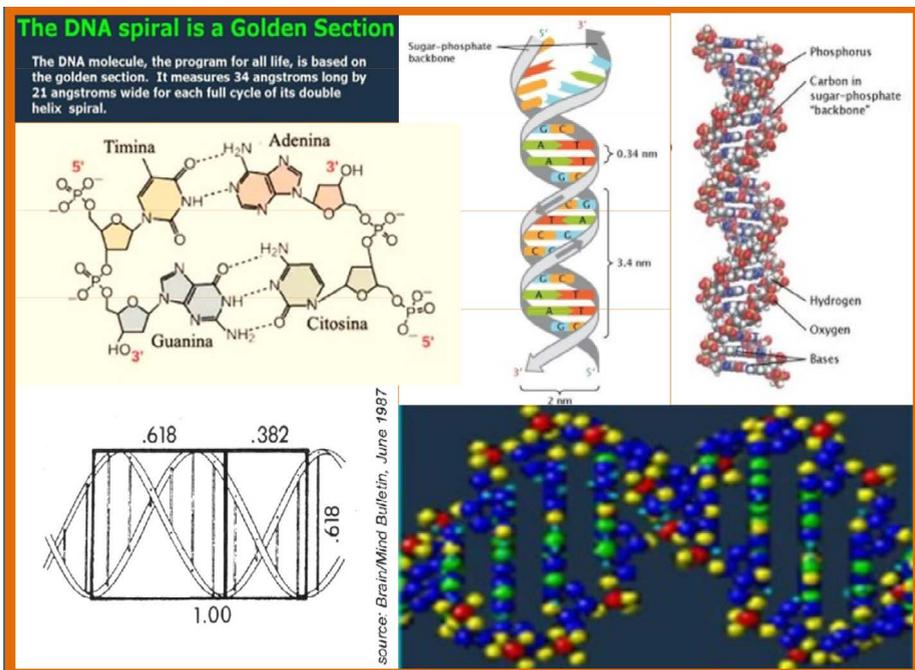


Figura 16

Le basi sono congiunte attraverso legami idrogeno che si instaurano tra le molecole, ricche di azoto. A unire le due basi azotate sono una serie di legami chimici, noti come legami a idrogeno. Adenina e timina interagiscono tra loro per mezzo di due legami a idrogeno, mentre guanina e citosina per mezzo di tre legami a idrogeno (i legami a idrogeno sono tratteggiati in **Figura 16**).

Tali legami tengono unite le basi azotate. Stante le coppie AT e GC di medesima lunghezza, l'elica ha un diametro costante.

Ogni coppia di basi planari ha una deviazione angolare rispetto alla precedente di circa 36° . L'elica pertanto compie un giro completo ogni 10 coppie di basi. L'elica è destrorsa e osservandola dall'alto essa appare avvolgersi in senso orario.

Se si mettesse in fila il DNA contenuto in tutte le cellule dell'organismo di un solo uomo, il filamento sarebbe lungo tre miliardi di miliardi di metri. La molecola di DNA misura, in lunghezza 34\AA ($3,4\text{ nm}$) e in larghezza 21\AA ($2,1\text{ nm}$) come evidenziato in **Figura 16**.

I numeri 34 e 21 sono numeri nella serie di Fibonacci. Dunque, la molecola di DNA è perimetrabile con un rettangolo aureo il cui rapporto tra lato maggiore/lato minore è pari a:

$$\mathbf{34/21 = 1,619047619}$$
$$\mathbf{\text{molto simile a } \phi = 1,6180339887}$$

ARTE E ARCHITETTURA

Gli antichi architetti, nei loro lavori cercavano di consolidare due concetti fondamentali:

- la **Simmetria** (l'accordo delle misure) mediante la ripetizione di certi rapporti proporzionali privilegiati;
- la **Eurytmia** (armonia) tra le lunghezze, le superfici e i volumi dell'opera, sia nella sua interezza che nelle sue parti singole.

Artisti e matematici del Rinascimento si interessarono molto alla matematica e, specificatamente, alla Sezione Aurea.

Nel XX Secolo l'architetto Le Corbusier (1887-1965) ha sviluppato una scala di proporzioni che titolò *Le Modulor*, basato su un corpo umano, la cui altezza è divisa in una sezione aurea che ha il suo punto centrale nell'ombelico. Utilizzando la successione di Fibonacci, egli creò un modulo che avrebbe dovuto essere utilizzato come base delle costruzioni, in modo da renderle al tempo stesso armoniche e funzionali e, quindi, capaci di migliorare la vita dell'uomo.

Le Corbusier descrisse *Le Modulor* come una gamma di misure armoniose per soddisfare la dimensione umana, applicabile universalmente all'architettura e alle cose meccaniche e lo utilizzò nella progettazione di molti edifici, inclusi *Notre Dame du Haut* e alcuni edifici a Chandigarh.

Nelle opere di Architettura moderna, l'opera che è l'espressione formale più rappresentativa dell'applicazione della sezione aurea è il **Dubai Frame (Figg. 17-18)**, la cui forma di telaio rettangolare è la più grande del mondo.

Il progetto risultò vincitore del concorso internazionale di architettura *ThyssenKrupp Elevator International Award 2009*, sponsorizzato da una delle principali aziende di ascensori al mondo.

I partecipanti, provenienti da tutto il mondo, furono invitati a presentare un emblema





che promuovesse il nuovo volto di Dubai. Una giuria internazionale selezionò l'idea vincitrice tra 926 proposte di *design*, per creare una iconica struttura ad alto emblema per Dubai. Il primo premio di 100.000 dollari, fu assegnato al gruppo dell'Arch. Fernando Donis dei Paesi Bassi. "Piuttosto che competere con la città, il Dubai Frame intende semplicemente inquadrarla", spiegò



Figura 17

il gruppo vincitore; ovvero il processo di sviluppo attuale e futuro della città in continua evoluzione, catturato all'interno del telaio, sarebbe stato incorniciato dall'edificio. Concepito e realizzato nel rapporto aureo di 150 metri (altezza) su 93 metri (larghezza), il vuoto costituisce dunque una finestra di monitoraggio dello sviluppo dello skyline attuale e futuro di Dubai .

Il Dubai Frame è stato realizzato in vetro, acciaio, alluminio e cemento armato con disegni del logo di Expo 2020 incastonati sulla facciata esterna. Sono stati utilizzati 15.000 metri quadrati di rivestimento in oro che copre l'esterno della struttura iconica. È posizionato in modo tale che i punti di riferimento rappresentativi della moderna Dubai possano essere ammirati da un lato, mentre dall'altro lato, i visitatori possono anche vedere le parti storiche della città. Il ponte di osservazione si estende sulla parte superiore del telaio chiuso, con pavimenti in fondo di vetro incorporati, con visione libera verso il basso per 150 metri, sulla campata inferiore dell'edificio. La struttura, nella parte superiore del telaio, offre una vista della città a tutto campo su una piattaforma panoramica con pavimento di vetro. Infatti, i visitatori possono attraversare la parte superiore del Dubai Frame percorrendo il lungo pavimento che improvvisamente sembra scomparire sotto i piedi.

La pavimentazione, sensibile al passaggio, simula anche la rottura del vetro ed è installata nella barra orizzontale di 93 metri lungo la parte superiore del telaio, collegando i due lati verticali della struttura.

La campata inferiore del telaio è sede di un museo con la storia della città e una mostra video che ne predice il futuro, simulando la ipotetica realtà della città tra 50 anni.

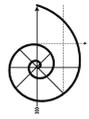
In conclusione la sezione aurea, pur rappresentando una delle molteplici costanti matematiche, ha una particolarità rispetto alle altre costanti, poiché dona armonia e

La sezione aurea e la serie di Fibonacci

bellezza a qualsiasi oggetto che ne segua le proporzioni. È molto presente in natura, ma ampiamente impiegata anche nell'arte e in architettura.



Figura 18



BIBLIOGRAFIA

- Leonardi Bigolli Pisani Fibonacci Liber abbaci. Edidit E. Giusti adiuvante P. D'Alessandro, Firenze, L. S. Olschki, (2020 Biblioteca di «Nuncius», vol. 79).
- F. Daddi (4/2011), Una formula chiusa per i numeri di Padovan, Archimede, pp. 203-207.
- Alfred S. Posamentier e Ingmar Lehmann, (2007) The Fabulous Fibonacci numbers, New York, Prometheus Book.
- Marco Abate (2007), Il girasole di Fibonacci, Matematica e cultura 2007, Michele Emmer Italia, Springer, pag. 227-240.
- V. Comincioli, (2006) Biomatemática: interazioni tra le scienze della vita e la matematica, capitolo 5: Forme e modelli nei sistemi biologici, Italia, Apogeo (Ebook), pag. 312-323.
- Ian Stewart, (2002) L'altro segreto della vita. La nuova matematica e gli esseri viventi, capitolo 6: Fiori per Fibonacci, Longanesi, pag 176-196.
- Stephan Douady e Yves Couder, (1992) Phyllotaxis as a Self-Organized Growth Process, in Physical Review Letters, 68, pag 2098-2101.
- M. J. Vygodskij (1978), Manuale di matematica superiore, Edizioni MIR, Mosca.

